PROBLEME DES DENUMERANTS

Introduction et notations.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

La notation $l..m$ où l et m sont entiers avec $l \leq m$ désigne l'ensemble des entiers i tel que $l \leq i \leq m$.

Soit L la liste L:=[1,2,5,10,20] : pour i variant de 1 à 5 on note par $L[i]$ la i-ième valeur
exemple: $L[3]$=5.

On définit pour i entier naturel $1 \leq i \leq 5$ et pour un entier naturel n les ensembles

$$E_i(n) = \left\{ (n_1, \ldots n_i) \in \mathbb{N}^i \,/\, \sum_{j=1..i} n_j . L[j] = n \right\} \text{ et } F_i(n) = cardinal(E_i(n))$$

Le problème est l'étude de plusieurs méthodes permettant de dénombrer le nombre de façons qu'il y a de totaliser n francs avec des pièces de 1F,2F,5F,10F et 20 F, c'est à dire le calcul de $F_5(n)$.

On note par $[x]$ la partie entière d'un réel.

On note par *iquo* l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

pour $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $iquo(n, p)$ est le quotient de la division euclidienne de n par p,

ou encore : $iquo(n, p) = [\frac{n}{p}]$.

I / **1)** Exprimer $F_1(n)$ en fonction de n.
Exprimer $F_2(n)$ à l'aide de la fonction *iquo*.

2) Pour $N<5$ et n, entier naturel, on note $p = [\frac{n}{L[N+1]}]$

Démontrer que $F_{N+1}(n) = \sum_{j=0..p} F_N(n - j.L[N+1])$.

3) Soit la procédure suivante écrite dans un pseudo langage de programmation :

```
lire (n)
nb:=0
p:=[n/5]
Pour I de 0
        faire
              debut
                    nb:=nb+F2(n-5*I)
A I=p
Afficher (nb)
```

Que représente *nb* dans la procédure précédente?

En vous inspirant de ce qui précède, écrire une procédure itérative avec pour paramètre d'entrée n et pour sortie $F_5(n)$.

Ceci soit en *MAPLE*, soit en *PASCAL*, soit en *CAML*.

II / Déduire de la question I/ 2) une procédure récursive ayant comme paramètres n et L.

III / Soit z un complexe de module strictement inférieur à 1, on définit les cinq fonctions :

$$f_1(z)=\frac{1}{1-z}\ ;\ f_2(z)=\frac{f_1(z)}{1-z^2}\ ;\ f_3(z)=\frac{f_2(z)}{1-z^5}\ ;\ f_4(z)=\frac{f_3(z)}{1-z^{10}}\ ;\ f_5(z)=\frac{f_4(z)}{1-z^{20}}$$

Elles sont toutes cinq développables en série entière pour z, avec $|z|<1$.

1) Soit $s(z)=\sum_{j=0..\infty} a_j.z^j$, une série entière de rayon au moins 1.

On note $S(z)=\frac{s(z)}{1-z^p}$ ou p est un entier naturel non nul.

On note par (b_n) les coefficients de S développée en série entière.

Pour n entier on pose $k=[\frac{n}{p}]$.

Démontrer que $b_n=\sum_{j=0..k} a_{n-j.p}$.

En déduire que les coefficients de f_5 sont en fait les $F_5(n)$.

Remarque : Cela permet avec un logiciel de calcul formel qui effectue les développements en série de calculer $F_5(n)$.

2) Soit p la fonction polynômiale définie par :

$$z\in\mathbb{C},\ p(z)=(1-z)(1-z^2)(1-z^5)(1-z^{10})(1-z^{20})=\sum_{j=0..38} a_j.z^j\ .$$

Que vaut a_0 ?

Si on note le développement de $f_5(z)=\sum_{j=0..\infty} b_j.z^j$.

Démontrer que pour n>37 on a la relation: $0=\sum_{j=0..38} a_j.b_{n-j}$

En déduire une méthode (récurrence linéaire) pour le calcul de $F_5(n)$ pour n>37 ceci à partir d'une liste $ini:=[F_5(0),...,F_5(37)]$ et de la liste des coefficients de p.

FIN DE L'ÉNONCÉ